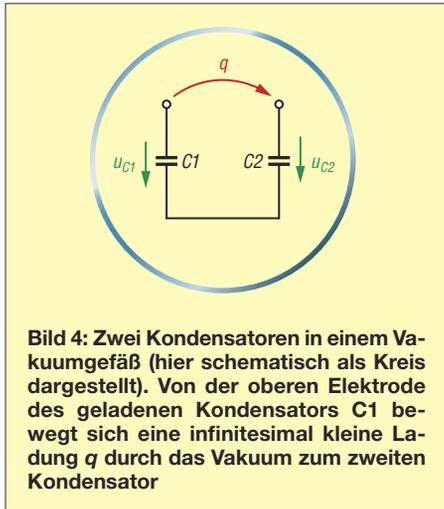


# Ergänzung zum Beitrag in FA 5/21, S. 384 f. „Kondensator-Paradoxon“

## ■ Kondensatoren im Vakuum

Wir könnten uns die gestellte Aufgabe auch ohne einen ohmschen Widerstand vorstellen, wenn wir z. B. annehmen, dass sich beide Kondensatoren im Vakuum befinden, siehe Bild 4. Wir lösen aus dem oberen Anschluss des Kondensators C1 eine kleine Ladungsmenge  $q$  aus. Diese be-



wegt sich – ohne Stöße wegen des angenommenen Vakuums – zur oberen Elektrode des Kondensators C2, da dieser anfangs die Spannung null hat. Durch den Ladungstransport sinkt die Spannung an C1 mit jeder übergehenden Ladung  $q$  und die an C2 steigt entsprechend schrittweise an. Das geht solange, bis zwischen den oberen Anschlüssen der Kondensatoren keine Spannungsdifferenz mehr vorliegt und die Ladung auf beide Kondensatoren gleich verteilt ist (wieder mit der Annahme  $C1 = C2$ ).

Wenn eine Ladung  $q$  ein Potentialgefälle – das ist gerade die Spannungsdifferenz zwischen den oberen Anschlüssen der Kondensatoren C1 und C2 – durchläuft, so nimmt sie im Vakuum kinetische Energie auf. Nach dem Energiesatz gilt:

$$[u_{C1} - u_{C2}]q = \frac{1}{2}mv^2. \quad (20)$$

Wenn die Ladung  $q$  auf der oberen Elektrode von C2 liegen bleiben soll, dann muss diese kinetische Energie vollständig beim Auftreffen der Ladung verloren gehen, damit ihre Geschwindigkeit wieder null wird. Wir haben also keinen ohmschen Widerstand, sondern bei diesem Gedankenexperiment nur Abbremsverluste. Die gesamten Abbremsverluste können wir berechnen (siehe Anhang A4), sie betragen:  $\frac{1}{4}Cu_0^2$ .

Das entspricht wieder genau dem Ergebnis von (15) und (19)! Ob wir ein elektrisches Ersatzschaltbild mit einem unvermeidlichen endlichen ohmschen Widerstand wählen oder wir machen ein Gedankenexperiment im Vakuum, immer geht die Hälfte der anfänglich in C1 gespeicherten Energie verloren.

## ■ Mechanisches Analogon

Wir betrachten dazu den vollständig inelastischen Stoß zweier Kugeln, siehe Bild 3 im Beitrag.

Kugel 1 bewege sich anfänglich mit  $v_{li}$  (i initial), ihre Masse sei  $m_1$ . Kugel 2 ruht und hat die Masse  $m_2$ . Beide Massen sollen gleich groß sein:  $m_1 = m_2 = m$ . Nach dem Stoß bewegen sich beide Kugeln gemeinsam weiter (Kugel 1 „klebt“ an Kugel 2, das entspricht einem inelastischen Stoß). Nach dem Impulssatz gilt:

$$mv_{li} = 2mv_f. \quad (21)$$

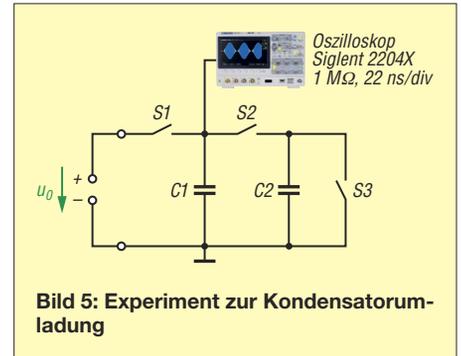
Die Geschwindigkeit der beiden Kugeln ist nach dem Stoß gerade halb so groß wie die Geschwindigkeit der Kugel 1 vor dem Stoß.

Die kinetische Energie der Kugel 1 vor dem Stoß ist (Kugel 2 ruht und hat daher keine kinetische Energie):

$$E_{kin\ li} = \frac{1}{2}mv_{li}^2. \quad (22)$$

Nach dem Stoß ist die kinetische Energie der sich gemeinsam bewegenden beiden Kugeln:

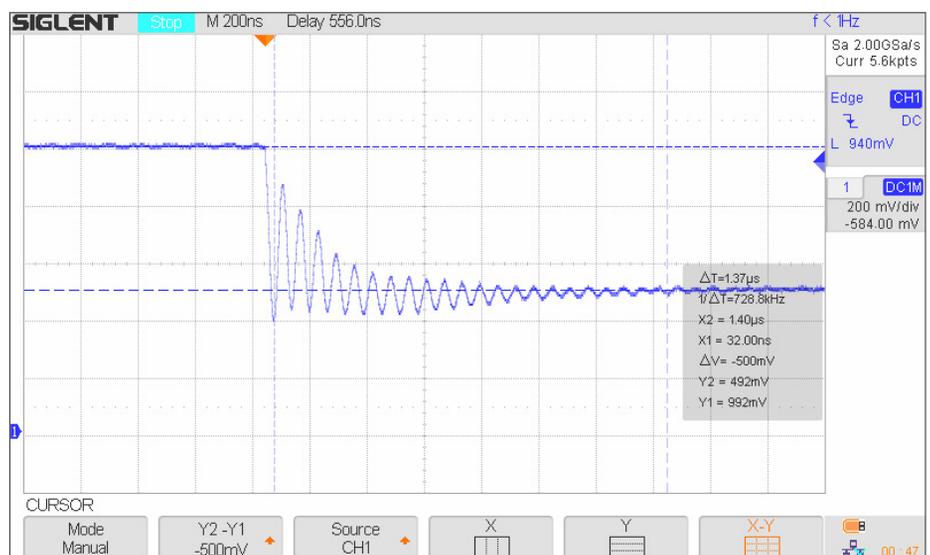
$$E_{kin\ f} = \frac{1}{2}2mv_f^2 = m\left(\frac{v_{li}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_{li}^2. \quad (23)$$



Die Beziehung (23) zeigt, dass gerade die Hälfte der anfänglich vorhandenen Energie im inelastischen Stoß verloren gegangen ist. Diese Energie steckt letztendlich in einer Erwärmung des fiktiven Klebers zwischen den beiden Kugeln. Das Kondensator-Paradoxon hat also ein mechanisches Pendant: den vollständig inelastischen Stoß.

## ■ Experimente zur Kondensatorumladung

Bild 5 zeigt den Aufbau der für das Experiment mit einem Steckbrett und Klingeldrahtleitungen realisiert wurde. Zunächst sind die Schalter S2 und S3 geschlossen und S1 ist offen. Beide Kondensatoren werden entladen. Sodann werden S2 und S3 geöffnet und S1 geschlossen. Der Kondensator C1 wird mit einem Labornetzteil auf die Spannung  $u_0 = (1 \pm 0,05)$  V aufgeladen. Dann wird S1 geöffnet. Das an C1 angeschlossene Oszilloskop Siglent 2204X im Single-Sweep-Modus auf die fallende Flanke getriggert (DC-Kopplung). Als Kapazität werden für einen ers-



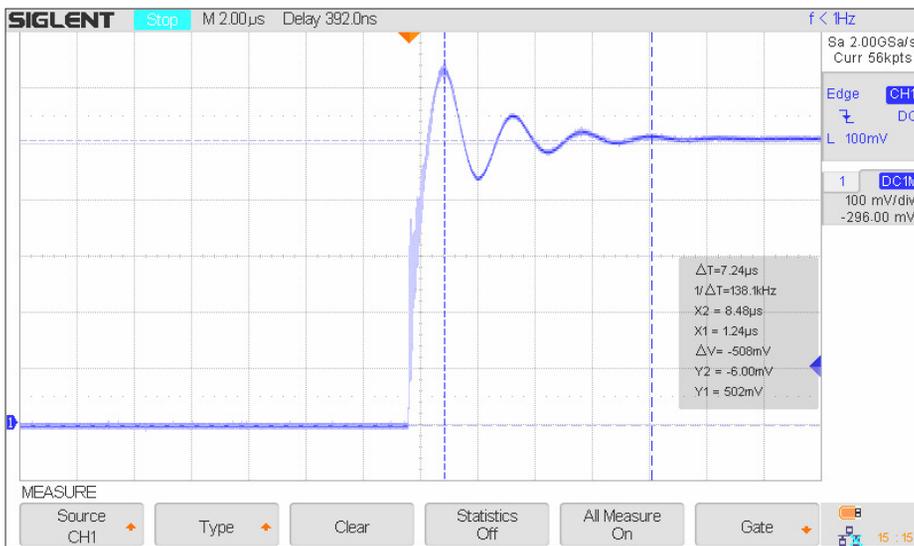


Bild 7: Oszillogramm der Spannung an C2 für C1 = C2 = 1 μF

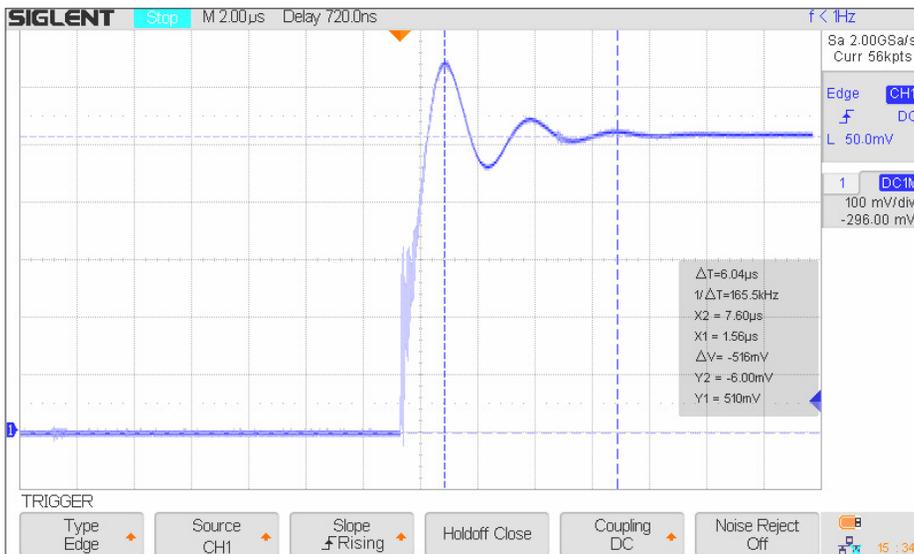


Bild 8: Oszillogramm der Spannung an C2 für C1 = C2 = 1 μF mit vergrößerter Drahtschleife

ten Versuch beide Kondensatoren zu jeweils 100 μF gewählt (Elektrolytkondensatoren).

Bild 6 zeigt das Ergebnis, wenn der Schalter S2 geschlossen wird.

Die Spannung fällt mit einer abklingenden Oszillation von 1 V auf 500 mV. Da die beiden Kondensatoren gleich groß sind, verteilt sich die zunächst nur bei C1 vorhandene Ladung zu gleichen Teilen auf C1 und C2, die Spannung ist daher nach dem Ladungsausgleich halb so groß.

Über 22 Perioden verstreicht eine Zeit von 1,37 μs (siehe Cursormarkierungen im Oszillogramm und ΔT). Die Periodendauer der Oszillation beträgt damit 62,27 ns. Dies entspricht einer Frequenz von 16,1 MHz.

Die Induktivität der Drahtschleife des Kreises bestehend aus C1, S2 und C2 lässt sich wie folgt abschätzen:

$$L_S = \mu_0 r \left( \ln \left( \frac{8r}{a} \right) - 2 + Y \right) \quad (24)$$

mit μ<sub>0</sub> magnetische Feldkonstante, r Schleifenradius, a Drahradius. Die Größe Y ist gleich 0, wenn der Strom gleichmä-

ßig über die Drahtoberfläche verteilt ist und gleich 0,5, wenn der Strom gleichmäßig über den Drahtquerschnitt verteilt ist. Bei einer Frequenz von 16 MHz beträgt die Eindringtiefe in eine Kupferleitung etwa 17 μm. Wir setzen daher für die weite-

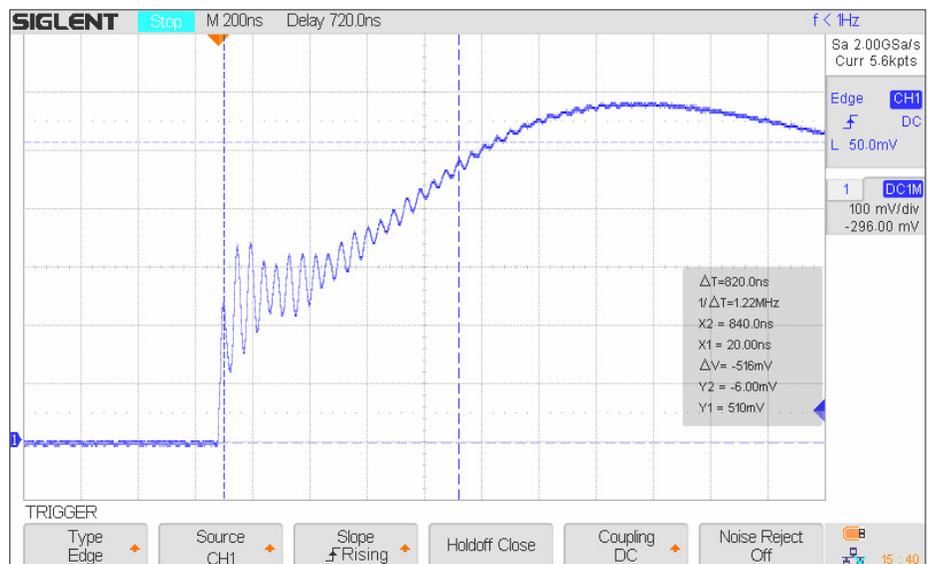


Bild 9: Schnelle Oszillation am Anfang des Signals von Bild 7 und Bild 8

re Rechnung  $Y = 0$ . Für  $r = 6$  cm,  $a = 0,3$  mm, erhalten wir:  $L_S \approx 405$  nH. Die Induktivität der beiden Elektrolytkondensatoren habe ich mit dem vektoriellen Netzwerkanalyser VNWA (v2, SDR-Kits) bei 16 MHz gemessen, sie beträgt jeweils  $L_C \approx 26$  nH. Damit ist die Gesamtinduktivität  $L_{ges} = L_S + 2L_C \approx 457$  nH. Um eine Frequenz von 16,1 MHz zu erzeugen, müsste nach der Thomsonschen Schwingungsformel eine Kapazität von  $C = 1/(\omega^2 L_{ges}) \approx 215$  pF vorliegen. Die Elektrolytkondensatoren wirken bei diesen Frequenzen offensichtlich nur als Induktivitäten. Woher könnten die 215 pF kommen?

Von der Eingangskapazität des Oszilloskops und der Anschlussleitung kommen zusammen etwa 120 pF (22 pF Eingangskapazität des Oszilloskops zzgl. etwa 100 pF über die Anschlussleitungen; die 120 pF sind mit dem VNWA bei 16,1 MHz bestimmt worden). Die Kapazität des Schalters S2 im geöffneten Zustand liegt bei 4,3 pF. Kurz vor dem Schließen, wenn die Kontakte sich nähern, wird diese sicher stark ansteigen. Insgesamt ist also davon auszugehen, dass die in Bild 6 beobachtete Schwingung auf einen parasitären Schwingkreis zurückzuführen ist, bei dem die Kapazitäten der Kondensatoren C1 und C2 keine Rolle spielen.

In einem zweiten Versuch wurden für C1 und C2 Folienkondensatoren (Aufschrift: WIMA 1 μ 50) mit jeweils 1 μF eingesetzt. Für diese Messung wurde die Spannung am oberen Anschluss von C2 erfasst (sonst würde die anfängliche Ladespannung an C1 aufgrund des 1-MΩ-Eingangswiderstands des Oszilloskops innerhalb kurzer Zeit nach dem Öffnen von S1 stark abfallen, bevor der Schalter S2 geschlossen werden kann). Bild 7 zeigt das Ergebnis. Nach einer abklingenden Oszillation, steigt die Spannung an C2 auf den erwarteten

Pegel von ca. 500 mV an. Die Periodendauer der Oszillation beträgt  $2,41 \mu\text{s}$ , entsprechend einer Frequenz von 414 kHz. Offensichtlich wirken im Falle der Folienkondensatoren diese tatsächlich mit ihrer nominellen Kapazität. Setzen wir  $C_1 = C_2 = C$ , so erhalten wir mit der Thomsonschen Schwingungsgleichung für die Induktivität (Faktor 2 berücksichtigt die Serienschaltung der beiden Kondensatoren):

$$L = \frac{2}{\omega^2 C} \quad (25)$$

Damit ergibt sich für die Induktivität:  $L = 295 \text{ nH}$ . Diese liegt in der Größenordnung der abgeschätzten Induktivität der Drahtschleife mit C1, S2 und C2. Um den Einfluß der Schleifeninduktivität zu untersuchen, habe ich im nächsten Versuch die Drahtverbindung vom oberen Anschluss von C1 zum Schalter in ihrer Länge in etwa verdoppelt. Das Messergebnis zeigt Bild 8.

Die Zeitdauer für zwei Schwingungen, siehe  $\Delta T$  der beiden vertikalen Cursormarkierungen in Bild 8, beträgt  $6,04 \mu\text{s}$ , die zugehörige Frequenz also 331 kHz. Die Abschätzung der Induktivität mit der Beziehung (25) führt auf  $L = 462 \text{ nH}$ .

Direkt nach dem Anstieg des Signals in Bild 7 und Bild 8 ist eine schnelle Oszillation zu sehen (links des ersten vertikalen Cursors). Bild 9 zeigt diese im Detail mit größerer Zeitablenkung.

Die Oszillationsfrequenz liegt bei 21,95 MHz und entspricht der parasitären Schwingung, wie sie auch schon in Bild 6 beobachtet wurde. Ein erneuter genauere Blick auf Bild 2 zeigt, dass diese schnelle Oszillation der langsameren Ausgleichschwingung durch den Ladungsausgleich zwischen C1 und C2 überlagert ist. Letztere ist im ersten Experiment so stark gedämpft, dass ein aperiodischer Grenzfall vorliegt und sich keine vollständige Schwingung mehr ausbildet, die in Bild 7 und 8 zu sehen ist.

**Literatur**

[1] Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. Main, 19. Auflage, 1980, S. 114

**Anhang**

**A1**

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt:

$$u_{C1} + u_R + u_{C2} = 0 \quad (A1.1)$$

Für die Spannungen an den Komponenten gilt:

$$i = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad u_R = Ri \quad (A1.2)$$

Wir differenzieren (A1.1) nach der Zeit und verwenden die Beziehungen (A1.2). Für die zeitliche Ableitung des Stroms benutzen wir die Bezeichnung:  $i' = di/dt$ .

$$\frac{i}{C_1} + Ri' + \frac{i}{C_2} = 0 \quad (A1.3)$$

Setzen wir  $C_1 = C_2 = C$ , so folgt nach einer Umstellung von (A1.3):

$$i' = -\frac{2}{RC} i \quad (A1.4)$$

Diese Differentialgleichung ersten Grades besitzt folgende Lösung:

$$i(t) = i_0 e^{-t/(RC/2)} \quad (A1.5)$$

**A2**

$$E_R = \int_0^\infty Ri^2(t) dt = \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = Ri_0^2 \left[ -\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^\infty = Ri_0^2 \frac{\tau}{2} = \frac{Ru^2 RC}{R^2 4} = \frac{1}{4} Cu_0^2 \quad (A2.1)$$

**A3**

Nach der Maschenregel erhalten wir nun:  $u_{C1} + u_R + u_L + u_{C2} = 0$  (A3.1)

Für die Spannung an der Induktivität gilt bei den gewählten Zählpfeilrichtungen:  $u_L = Li'$  (A3.2)

wobei  $i'$  wieder die zeitliche Ableitung des Stroms bezeichnet. Für die Differentialgleichung erhalten wir so in Analogie zu (14):

$$\frac{i}{C_1} + Ri' + Li'' + \frac{i}{C_2} = 0 \quad (A3.3)$$

Wir stellen diese in folgende Form um:

$$i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{2}{LC} i = 0 \quad (A3.4)$$

mit dem schon zuvor gewählten Ansatz:  $C_1 = C_2 = C$ . Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiten Grades ist bekannt. Für den Fall schwacher Dämpfung ( $\delta < \omega_0$ ) gilt:

$$i(t) = -\frac{u_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t), \quad (A3.5)$$

mit den Abkürzungen:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC/2}} \quad (A3.6)$$

Wir berechnen als nächstes den Spannungsverlauf am Kondensator C1:

$$u_{C1}(t) - u_{C1}(0) = \int_0^t \frac{i}{C_1} dt = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \int_0^t e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) dt = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \left[ \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega_e^2} (-\delta \sin \omega_e t - \omega_e \cos \omega_e t) \right]_0^t$$

$$\dots = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \left[ \frac{e^{-\delta t}}{\omega_0^2} (-\delta \sin \omega_e t - \omega_e \cos \omega_e t) + \frac{\omega_e}{\omega_0^2} \right] \quad (A3.7)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  erhalten wir:

$$u_{C1}(t \rightarrow \infty) - u_{C1}(0) = -\frac{u_0}{\omega_0^2 LC_1} = -\frac{u_0 LC/2}{LC_1} = -\frac{u_0}{2} \quad (A3.8)$$

Die Spannung am Kondensator C1 sollte am Anfang  $u_{C1}(0) = u_0$  sein, also erhalten wir:

$$u_{C1}(t \rightarrow \infty) = u_{C1}(0) - \frac{u_0}{2} = \frac{u_0}{2} \quad (A3.9)$$

Die Spannung sinkt also nach unendlich langer Zeit auf  $u_0/2$  ab, wie wir es schon bei (5) erhalten hatten. Für den Kondensator C2 gilt eine analoge Beziehung wie (A3.8):

$$u_{C2}(t \rightarrow \infty) - u_{C2}(0) = -\frac{u_0}{\omega_0^2 LC_2} = \frac{u_0 LC/2}{LC_2} = -\frac{u_0}{2} \quad (A3.10)$$

Der Anfangswert ist jedoch hier  $u_{C2}(0) = 0$ , daher folgt aus (A3.10):

$$u_{C2}(t \rightarrow \infty) = -\frac{u_0}{2} \quad (A3.11)$$

Also gilt mit (A3.8), (A3.11):  $u_{C1}(t \rightarrow \infty) + u_{C2}(t \rightarrow \infty) = 0$ . (A3.12)

Das ist die zu erwartende Maschengleichung für die Schaltung nach Bild 2, wenn nach unendlich langer Zeit der Strom verschwindet.

Für die ohmschen Verluste berechnen wir in Analogie zu (A2.1), jetzt jedoch mit dem Strom nach der Beziehung (16):

$$E_R = \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = R \frac{u_0^2}{\omega_e^2 L^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sin^2(\omega_e t) dt . \quad (\text{A3.13})$$

Die Lösung des Integrals ist weiter unten dargestellt. Wir erhalten schließlich (mit (17)):

$$E_R = R \frac{u_0^2}{\omega_e^2 L^2} \frac{1}{4\delta} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} = R \frac{u_0^2}{L^2} \frac{L}{2R} L \frac{C}{2} = \frac{1}{4} Cu_0^2 . \quad (\text{A3.14})$$

Um das Integral in (A3.13) zu lösen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$a = -\frac{2\delta}{\omega_e}, \quad x = \omega_e t . \quad (\text{A3.15})$$

Damit wird aus dem Integral in (A3.13) [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_e} \int_0^{\infty} e^{ax} \sin^2 x dx &= \frac{1}{\omega_e} \left[ \frac{e^{ax} \sin x}{a^2 + 4} (a \sin x - 2 \cos x) + \frac{2}{a^2 + 4} \int_0^{\infty} e^{ax} dx \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\omega_e} \left[ \frac{e^{ax} \sin x}{a^2 + 4} (a \sin x - 2 \cos x) + \frac{2}{a^2 + 4} \frac{e^{at}}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\omega_e} \frac{2}{a^2 + 4} \left( -\frac{1}{a} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

Lösen wir die Abkürzungen wieder auf, so folgt:

$$\dots = \frac{1}{\omega_e} \frac{2}{\left(\frac{2\delta}{\omega_e}\right)^2 + 4} \left(\frac{\omega_e}{2\delta}\right) = \frac{\omega_e^2}{4\delta^2 + 4\omega_e^2} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{4\delta} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} . \quad (\text{A3.17})$$

#### A4

Die zu einem Zeitpunkt  $t$  auf C1 und C2 vorhandene Ladung ist gleich der anfänglich auf C1 vorhandenen Ladung (Ladungserhaltung):

$$Q = q_1 + q_2 . \quad (\text{A4.1})$$

Welche Energie geht nun insgesamt verloren (wir nehmen wieder an:  $C_1 = C_2 = C$ ):

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} dE &= \int_0^{Q/2} (u_{C1} - u_{C2}) dq_1 = \int_0^{Q/2} \left( \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} \right) dq_1 = \int_0^{Q/2} \left( \frac{q_1}{C} - \frac{Q - q_1}{C} \right) dq_1 = \int_0^{Q/2} \left( \frac{2q_1}{C} - \frac{Q}{C} \right) dq_1 = \dots \\ &= \left[ \frac{q_1^2}{C} - Q \frac{q_1}{C} \right]_0^{Q/2} = \frac{1}{C} \left( \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2}{2} - Q^2 + Q^2 \right) = -\frac{Q^2}{4C} . \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Mit  $u_{C1}(0) = u_0$  und  $Q = Cu_0$  folgt aus (A4.2):

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} dE = -\frac{1}{4} Cu_0^2 . \quad (\text{A4.3})$$